

# 基于分形理论与数字滤波的曲面拟合

严泰来 韩铁涛 朱德海 涂真

(中国农业大学, 北京 100094)

**摘要** 土壤调查中常常需要解决曲面拟合问题,即根据有一定分布的有限个样本网络点数值(比如高程、地下水深度、土壤pH值等),计算研究区域中所有网格点的数值。这是一个经典的数学理论问题。本文将分形理论与数字滤波(数字信号处理)方法有机地结合起来,给出一种新型的曲面拟合计算方法,该算法可以适应研究区域中存在有隔离断裂曲面的复杂情况。

**关键词** 分形,面插值,卷积,样本点,隔离界面

**中图分类号** S29

通常自然状态下的地物各种属性都是呈连续、平滑分布的,比如地表高程、地表湿度、温度、地下水深度、土壤污染状况、土壤pH值等等。这些值尽管在局部范围内会有较大变化,但是从宏观角度看,变化还是连续的、渐变的。我们用一定方法在地面勘察、测量、调查地表这些属性,只能是在有限的网格中获取样本数据,然后需要从这些样本数值去推算研究区所有网格点的属性数据,从而生成DTM(Digital Terrain Model)数据,供研究者使用。这个问题是GIS基本问题之一,也是实际工作中经常遇到的问题。

从有限样本网格点数据推算研究区域所有的网格点数据在数学中属于面插值或曲面拟合问题,这是一个经典数学问题,没有唯一精确解。前人为此做过不少成功的工作,如拉格朗日插值法<sup>[1]</sup>,样本函数法,最小二乘趋势面法,傅立叶级数法等<sup>[2]</sup>。Greent和Sibson(1978)、Ripley(1981)也提出了一种多边形网格内插的方法<sup>[3]</sup>,这些工作都在一定范围内解决了问题,但都有一定局限性,较难适应于计算机这样特定的计算操作环境,特别是在研究区域中存在有随机的复杂隔离界面情况下,计算十分复杂。本文提供一个新型的计算方法,可以克服以上的不足。

## 1 基本原理

### 1.1 数字滤波分析

数字信号处理的理论告诉我们,对于一个数字图像,经用适当的卷积核进行数字卷积滤波处理,可以达到特殊的效果。图1显示数字卷积滤波的过程。图1-(a)为一幅数字图像的部分数据,每个数字表示像元的灰度值,注意其中带阴影的像元数据,其数值与周围

像元数值差异很大。图 1-(b)为卷积滤波核,或称作卷积(滤波)模板,它是一个数字阵列,并且是奇数行与列的矩阵,阵列中心称作卷积核心。卷积模板外系数的分母是阵列各元素数值的和。卷积滤波过程是用卷积模板“贴”到数字图像数据阵列中,如图 1-(c)所示。此时卷积模板中每一元素与数字图像数据阵列中的局部相重合,将两阵列相重合的元素数值相乘,并将这 9 个积相加起来,得到连加和  $S$ :

$$S = 10 \times 1 + 10 \times 2 + 11 \times 1 + 10 \times 2 + 10 \times 4 + 11 \times 2 + 10 \times 1 + 11 \times 2 + 11 \times 1 = 166 \quad (1)$$

用此连加和  $S$  值乘以卷积模板系数得到卷积结果值  $R_{ij}$ :

$$R_{ij} = 166 \times 1/16 = 10 \quad (2)$$

将此  $R_{ij}$  值替换卷积模板中心对应的图像数据阵列网点数值,然后将卷积模板向右移动一个像元,重复上面计算,直到移动至图像的一端边线为止,再处理下一行,如此下去,直到覆盖图像数据的每一个像元,这样处理后的数据如图 1-(d)所示。观察处理后的结果可以发现原来数值为 10、11 或 12 的像元处理后基本没有改变,但是原来数值为 200 的像元周围数据却发生改变,异常数据对周围的影响由此体现出来,当然它的影响还只是它周边的一圈,因为卷积模板是  $3 \times 3$  个元素。若卷积模板为  $5 \times 5$  个元素,则会影响周边 2 圈像元网格点。原来数值为 200 的像元自身数值也在卷积滤波处理后大为降低下来,这种改变也可看作周围对该元素自身的影响。对此我们也可以在完成以上这种计算后,将类似“200”这样的数据再重新赋值回去(样本点曲面拟合就采用此方法),这样做既体现了异常点或样本点对周围的影响,也不改变它自身的既定数值。

将以上计算过程表达成一般的计算公式,可写作

$$D(i, j) = P \otimes C = \frac{1}{E} \sum_{k=-m}^m \sum_{l=-n}^n P(i+k, j+l) \times C(k+m+1, l+n+1) \quad (3)$$

式中  $D(i, j)$  表示卷积滤波后图像第  $i$  行, 第  $j$  列像元的数值;

$P, C$  分别表示原始图像像元矩阵和卷积(滤波)模板矩阵;

$C$  矩阵尺寸为  $2m+1$  行,  $2n+1$  列。

数字卷积滤波的效果可以是消减噪声信号(低通滤波)、增强边界清晰度(高通滤波)、提取某方向的信息(方向滤波)等等,滤波效果取决于卷积(滤波)模板的设置。图 1 所示的是低通滤波。我们后面用到的也正是低通滤波。

## 1.2 分形方法

### 1.2.1 分形方法的引进

根据样本点数据进行曲面拟合面临的情况与数字卷积滤波有一原则的不同。数字卷积所需具备的条件是每个网格点(在数字图像中是每个像元)都有数据,卷积核对这样每个元素已有数据的矩阵进行数据处理以体现数据间的相互影响。而根据样本点作曲面拟合却没有这样的条件,它只在个别的网格中有数据,即样本数据,大多数或绝大多数网格中没有数据。为解决上述问题,我们引进分形的方法。分形理论是新型的理论体系,它的核心思想是将一个存在某种精细结构自相似的随机复杂几何体描述成有限阶分形的组合。我们求解的拟合曲面是符合自相似要求的,因为求解曲面应当是光滑的、连续的,即曲面任一点上的方向导数应当是相似的(当然不是相等的),否则

曲面不能光滑。

1.2.2 分形拟合曲面的方法 本着对于复杂曲面分形描述、逐阶逼近的原则,我们可以将研究区域中所有样本点的属性数据算术平均,该算术平均作为零阶分形的属性值,记作  $MDG [f_0(0, 0)]$ ,当然这仅是研究区域最为粗略的描述。将研究区域分为  $3 \times 3$  不相等的子区域,通常每个子区域都包含着若干个样本点,逐个地对每个子区域内的样本点属性值取其算术平均,子区域中样本点属性平均值记作  $MDS [F_1(i, j)]$ ,  $F_1(i, j)$  表示第  $i$  行 ( $i = 0, 1, 2$ ) 第  $j$  列 ( $j = 0, 1, 2$ ) 第 1 阶分形子区。考虑到本阶分形子区域是上阶分形子区域的局部,因而本阶分形子区域属性赋值要受到上阶分形子区域的影响。我们用加权平均解决,即:

$$MDG[F_1(i, j)] = [MDG[F_0(0, 0)] + 9MDS[F_1(i, j)]]/10 \quad (4)$$

注意本阶分形子区域样本点属性平均值的权重我们取 9,而上阶分形子区域的权重取 1,突出当前阶分形子区域样本点属性平均值的作用。当然,这两个权重值是可调的。这样每个分形子区域(1 阶分形就有  $9^1 = 9$  个子区域)都赋有属性值。这种属性值组成我们称为本底属性值。然后用卷积(滤波)模板对每个分形子区域进行数据处理,以体现不同分形子区域相互作用。这样就完成了本阶分形每个子区域属性的最后赋值工作。接着转入下阶分形,即重复上面的做法,直到分形子区域达到要求的网格大小时为止。

1.2.3 分形卷积数据处理的两个细节问题 对于需要卷积的当前分形子区域处在研究区域边缘位置,如图 2 所示的情况,此时进行卷积处理只需将卷积(滤波)模板元素中处在研究区域外的元素值赋于“0”并相应改变卷积系数即可。在图 2 所示的情况,卷积核系数应当为  $1/9$ ,这样处理的原因是不考虑研究区域外对被处理的分形子区域的影响。

另一个细节问题是当分形阶数增加时就会出现一部分分形子区域内没有样本点网格数据,此时该分形子区域的属性赋值就取该子区域所处在的上一阶分形子区域的属性值。

1.2.4 分形方法引进的意义 分形方法引进在求解拟合曲面问题中解决了两个问题:

(1) 将没有数据的网格分层次地填充了样本加权平均数据,使卷积滤波处理成为可能;(2)克服了卷积滤波法将异常网格点只影响单层周围网格点(注:这是指  $3 \times 3$  卷积模板的情况)的缺点。这是因为我们的分形是由粗到细的,对于形式一样的卷积滤波,低阶分形滤波涉及到的范围远远大于最后一阶  $3 \times 3$  个网格的范围。这体现了异常网格点对愈远的网格影响愈小且多个网格点综合影响的原则。

### 1.3 在有隔离带情况下的曲面拟合

有隔离带作用下的曲面拟合在经典的曲面拟合方法中是一个比较棘手的问题。所谓隔离带,是指在研究区域中,存在着一个图斑,或一段曲线,在该图斑或曲线的两侧,网格属性值互不发生影响,可以在此属性值不连续,拟合出的曲面在此发生断裂。通常在此隔离带边界上,不存在二阶导数。由于隔离带常常是不规则的,经典的曲面拟合方法将隔离带当边界条件处理,隔离带不规则使边界条件变得复杂化,而运用分形与卷积处理的共同作用,这个问题却不难解决。原则上只是将被隔离带隔离的子分形割裂成两部分或三部分,分别对这些割裂的子分形进行处理即可。具体运算可按以下方法进行:

(1) 区分隔离带分割的分形子区域有两种情况,一种称作半分割(图 3-(a)),即隔离

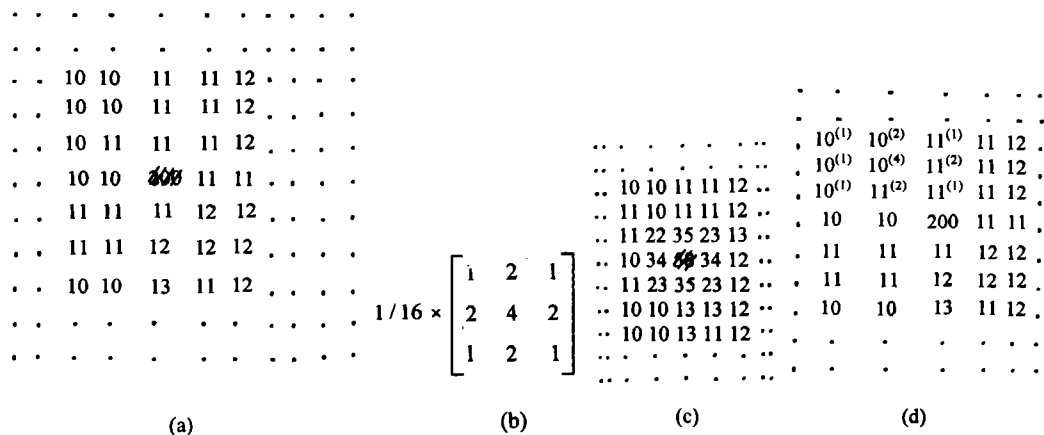


图 1 卷积滤波过程示意图

Fig.1 Illustrative diagram of the digital faltung integral filtering course

带没有将子区域完全分割成相互分离的两部分或几部分,子区域还是一个连通域;还有一种称作全分割(图 3-(b)),即隔离带将子区域完全分割成相互分离的两部分或几部分。有时分割的部分面积很小,若分割部分的面积与子区域面积的比值小于某一值,比如 10%,还可以将此部分忽略不计,留待下一阶区域去处理。对于半分割,我们可以认为不分割,忽略隔离带在此分形子区域中的存在,因为该子区域还是连通的。该阶分形下,属性值还是连续分布的。下一阶分形,会有一些子区域被全分割,到时再行处理。

(2) 全分割分形子区域的数据处理。凡分割部分面积与所在分形子区域面积大于某比值的分割部分,都将分割部分当作一个独立分形子区域来处理,即需要检核出这一部分中覆盖的所有样本数值,计算其平均值和这部分的本底属性值,并将与这部分邻近的分形分子区域分割部分判断检核出来,用卷积模板((1)式)进行数据处理计算分形子区域该分割部分的属性最后

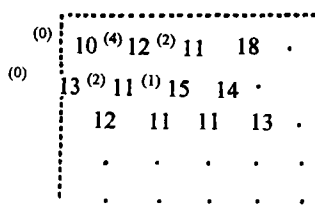


图 2 当前分形子区域处在研究区域边缘位置的卷积处理  
Fig.2 The faltung processing of the current fractal area on the edge of research district

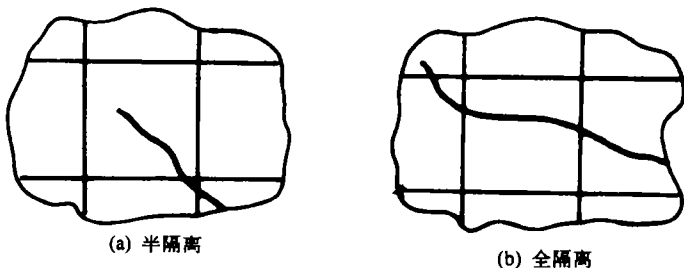


图 3 隔离带分割分形子区域两种情况

Fig.3 Two cases of the fractal area broken up by a separating zone

值。然后再计算另一分割部分的属性最后值,以此方法逐阶计算下去。

当然这里的检核、判断工作需要地理信息系统(GIS)的支持,需要使用地理信息系统的点位判别、求交运算、邻域判断等空间分析的功能<sup>[3]</sup>。随着分析逐阶细化,更多的子形受到隔离带的影响,隔离带的作用也就显现出来,隔离带两边的属性值就会相差愈来愈远,最后计算结果拟合曲面在此就成为断裂带。

## 2 试验结果

本试验<sup>1)</sup>是在有  $243 \times 243$  个网格条件下进行的,在 59049 个网格中,具有 202 个样本点数据,样本点最大属性值为 1048,最小属性值为 95,分布不均匀,主要集中在研究区的中部,经过用本算法计算,得到试验结果。图 4 显示从样本数据所得到的拟合曲面网格点数值分布的情况。图中划线的数字是样本点数据,其它是计算得到的数据。图 4 仅显示了全部数据的一小部分。从这一试验结果看,本方法达到了预期的效果,拟合曲面网格点数值分布在水平方向与垂直方向上都达到了平滑过渡,体现了样本点对周围的影响。

```

219 223 246 370 393 395 410 413 414 420 421 424 430 446 454 484 490 487 470 468 473 504 509 510 509 521 495 518 522 511 449 438 437
223 227 250 374 397 399 413 416 417 423 420 427 451 456 463 492 497 494 474 471 476 508 514 516 528 515 510 525 529 517 453 441 440
247 251 273 395 417 419 433 436 433 429 424 423 470 482 488 517 521 515 492 486 493 527 534 540 560 565 559 548 544 532 467 455 453
375 378 399 507 527 530 541 543 534 476 464 454 596 618 622 642 646 637 578 566 573 630 642 655 744 765 742 637 622 610 541 528 526
398 402 422 528 548 550 561 563 551 487 471 491 616 643 647 666 669 658 595 579 552 647 662 675 777 921 779 656 637 624 554 542 540
402 406 425 532 552 554 566 569 560 502 489 465 609 633 648 680 691 681 617 600 626 716 723 694 724 782 762 655 639 627 558 545 543
423 425 445 554 574 577 595 598 596 591 586 581 536 594 625 782 806 809 780 690 791 1045 1048 740 700 706 699 662 653 641 576 564
427 428 449 557 578 581 600 604 604 606 606 601 589 590 624 798 840 857 933 806 812 825 804 728 701 697 692 661 655 643 579 568 565
428 430 450 560 580 579 596 606 615 621 624 628 624 620 640 799 895 967 829 813 846 766 588 720 661 665 682 661 661 649 587 575 570
436 439 459 572 592 589 559 647 668 725 734 738 798 727 755 793 885 767 809 816 803 671 693 609 373 585 628 692 694 683 629 617 606
437 440 461 574 595 598 643 663 708 792 803 783 747 739 738 738 760 735 799 815 820 693 652 643 571 585 720 731 702 718 642 627 611
447 451 470 580 599 609 665 675 776 745 741 737 726 707 721 730 729 740 798 819 804 701 674 655 587 543 632 703 706 686 654 598 582
504 509 525 608 625 638 715 811 731 680 671 671 675 675 651 588 603 649 776 873 783 770 658 630 532 512 547 766 708 668 464 429 418
514 519 531 614 635 650 746 734 720 668 660 661 667 668 624 623 574 772 821 854 764 667 643 621 525 502 496 678 704 658 436 395 389
510 518 528 570 698 644 701 710 706 671 669 670 677 679 650 579 590 641 815 761 726 635 570 604 514 495 514 647 671 635 425 389 384
472 525 537 580 596 600 617 624 633 710 719 724 738 737 723 661 650 658 662 662 641 548 528 519 461 448 460 507 519 495 383 358 354
510 514 528 576 583 581 599 605 624 714 732 738 787 750 734 671 659 657 644 642 625 535 518 508 449 437 442 482 491 473 371 353 349
512 514 526 570 578 577 556 605 622 706 746 723 733 733 721 663 654 651 637 634 615 521 502 493 438 425 405 473 485 467 367 349 346
498 500 507 543 549 548 612 626 631 636 641 641 647 648 644 629 624 620 596 592 569 437 413 407 381 373 381 437 448 431 343 327 327
496 497 503 538 544 555 620 649 631 624 623 625 632 633 631 621 619 614 588 584 529 423 396 381 368 357 376 431 441 424 329 323 324
496 497 503 537 542 552 611 622 620 615 615 611 610 606 603 591 588 583 557 553 531 400 377 372 351 347 355 406 414 404 330 322 323
500 500 505 526 531 537 562 568 567 569 569 557 474 462 457 427 422 416 383 389 372 287 270 266 250 247 250 262 266 269 311 316 310
500 501 505 525 529 534 565 557 556 559 561 545 453 435 429 397 389 381 360 359 345 264 250 247 231 228 230 237 238 248 303 314 310
505 506 509 526 529 534 556 557 539 554 556 550 452 435 428 394 383 335 357 359 343 262 246 243 228 225 226 234 235 244 298 307 304
533 536 535 529 529 534 563 567 560 526 522 511 456 436 427 378 365 360 354 355 338 243 226 223 209 206 207 216 217 226 267 276 275
547 541 539 531 529 535 565 585 563 523 515 505 447 436 426 375 365 355 355 355 337 240 222 219 205 202 204 212 214 222 262 270 271
537 541 541 536 534 535 560 563 556 518 512 500 439 427 420 372 364 361 354 354 335 238 220 218 203 201 202 211 212 219 259 267 267
535 543 545 572 539 546 523 523 518 496 491 477 399 386 381 362 357 354 337 354 317 226 209 207 196 193 194 200 201 208 243 250 250
535 563 544 542 538 506 516 516 512 491 487 473 393 378 375 359 356 352 332 330 312 223 207 205 194 192 193 198 199 205 240 246 247
517 526 531 537 554 524 507 505 500 478 473 456 373 356 353 337 334 330 311 307 294 212 199 197 186 184 185 190 190 195 227 231 232
426 431 445 548 492 479 452 447 440 399 392 372 260 240 236 217 214 212 202 200 193 161 154 152 145 143 144 145 145 147 148 150 150
409 414 416 468 475 468 441 436 428 385 377 356 240 218 215 195 192 190 182 181 176 150 145 144 137 136 136 137 137 137 135 135 135
405 408 409 416 459 459 433 430 423 382 375 353 236 215 211 192 188 187 179 178 173 148 143 142 135 134 134 135 135 135 133 132 132

```

图 4 根据样本点属性数据推算全部网点属性数据试验部分结果展示

Fig.4 The partial results of attributes of the whole grids calculated based on the sample attribute data

1) 本试验数据是上海市房地产估价数据,每一网格数据代表一个评价单元的地价(美元/平米)。

### 3 结 论

通过实验与理论分析,我们可以得到以下结论:

1. 这种基于分形理论与数字滤波的曲面拟合方法可解决在已知少数样本点数据情况下的曲面拟合问题。计算方法简单,算法步骤数学意义明确,可在计算机上编程实现。
2. 鉴于曲面拟合结果的不唯一性,本算法对于卷积模板元素的数值和本阶子分形与上阶分形属性值加权平均的权重((4)式)可以灵活调整,以便计算结果更合乎实际情况的要求。
3. 在地理信息系统的支持下,本算法可以解决在有隔离带情况下的曲面拟合问题。

### 参 考 文 献

1. 张圣华. C语言数值计算. 北京: 海洋出版社, 1993
2. 曾文曲, 王向阳等. 分形理论与分形的计算机模拟. 沈阳: 东北大学出版社, 1993
3. 严泰来等. 土地信息系统. 北京: 科技文献出版社, 1993

## IMITATING CAMBER BASED ON FRACTAL THEORY AND DIGITAL FILTERING

Yan Tai-lai Han Tie-tao Zhu De-hai Tu Zhen

(China Agricultural University, Beijing 100094)

### Summary

The problem to imitate a camber often needs to be solved in soil survey. So-called imitating camber is to calculate the attribute data of whole grids in research area based on a limited amount of sample attribute data such as elevation data, underground water depth, soil pH. This is a classical mathematical theory problem. This paper gives a new method to imitate camber, which combines fractal theory with digital filtering and is fit to process the complicated case with a separating zone.

**Key words** Fractal, Insert data to imitate camber, Faltung, Sample point, Separating zone